CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ
„TEHNICI MATEMATICE”-ediția a XIX-a
Etapa județeană 23.02.2024
BAREM Clasa a XII -a *M_Tehnologic*

SUBIECTUL I

1)	$S_5=\frac{(a_1+a_5)\cdot 5}{2}$. Cum $a_1+a_5=a_2+a_4=6 \Longrightarrow$ $S_5=\frac{6\cdot 5}{2} \Longrightarrow S_5=15$	3p 2p
2)	$A(a,a)\in \mathcal{G}f$, cu $a\in\mathbb{Z}$, $\Longrightarrow f(a)=a \Leftrightarrow -3a^2+3a+5=a \Leftrightarrow -3a^2+2a+5=0$ $a_1=\frac{5}{3}\notin\mathbb{Z}$, $a_2=-1\in\mathbb{Z}$ deci $A(-1,-1)$ verifică cerința.	3p 2p
3)	$2^{x+2}=\sqrt[3]{2^{x^2-4}} \Leftrightarrow 2^{3(x+2)}=2^{x^2-4} \Leftrightarrow 3x+6=x^2-4 \Leftrightarrow x^2-3x-10=0$ Soluții: $x_1=-2$, $x_2=5$ care convin.	3p 2p
4)	Fie x prețul inițial. Prețul final este $x-12$ lei. $x+\frac{10}{100}x-\frac{10}{100}\cdot\left(x+\frac{10}{100}x\right)=x-12$ $\Leftrightarrow \frac{1x}{10}-\frac{11x}{100}=-12 \Leftrightarrow -\frac{x}{100}=-12 \Longrightarrow$ $x=1200$ lei este prețul inițial.	3p 2p
5)	*Teorema cosinusului* pentru unghiul B: $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B$ $\Longrightarrow AC^2=4+16-2\cdot2\cdot4\cdot\frac{1}{2} \Leftrightarrow AC^2=12 \Longrightarrow AC=2\sqrt{3}$. $P_{\Delta ABC}=AB+BC+CA \Longrightarrow P_{\Delta ABC}=2+4+2\sqrt{3}=2\left(3+\sqrt{3}\right)$.	3p 2p
6)	$E\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2\cdot\frac{\pi}{3}+\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{2}+\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{\sqrt{3}}{2}=1+\sqrt{3}$.	2p 3p

SUBIECTUL II

1)	a) $\det\left(A(-1)\cdot A(1)\right)=\det A(-1)\cdot\det A(1)$ $\det\left(A(-1)\right)=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0+2=2$, iar $\det\left(A(1)\right)=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -1 & 2\end{vmatrix}=0$ $\det\left(A(-1)\cdot A(1)\right)=2\cdot 0=0$.	2p 3p
	b) $A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1-2x & 2x\\ -x & 1+x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1-2y & 2y\\ -y & 1+y\end{pmatrix}=$ $\begin{pmatrix}1-2x-2y+2xy & 2x+2y-2xy\\ -x-y+xy & 1+x+y-xy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2(x+y-xy) & 2(x+y-xy)\\ -(x+y-xy) & 1+(x+y-xy)\end{pmatrix}$ Deci $A(x)\cdot A(y)=A(x+y-xy)$ pentru orice numere reale x și y. $x+y-xy=x+y+axy \Leftrightarrow a=-1$ satisface cerința.	3p 2p
	c) $A(n)=\begin{pmatrix}1-2n & 2n\\ -n & 1+n\end{pmatrix}$, $\det\left(A(n)\right)=1-n$, $1-n\neq 0$ $(\forall)n\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}$, deci $A(n)$ inversabilă $A(0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$, element neutru la înmulțirea matricelor, $A(m)$ este inversa matricii $A(n) \Leftrightarrow A(m)\cdot A(n)=A(n)\cdot A(m)=A(0)$ $A(m)\cdot A(n)=A(m+n-mn)=A(n+m-nm)=A(n)\cdot A(m)$ Se obține $m+n-mn=0 \Leftrightarrow (m-1)(n-1)=1$. Cum m și n sunt numere întregi avem $\begin{cases}m-1=1\\ n-1=1\end{cases}$ sau $\begin{cases}m-1=-1\\ n-1=-1\end{cases}$. $(m,\ n)\in\{(2,\ 2),\ (0,\ 0)\}$.	2p 2p 1p
2)	a) $\frac{2}{3}*3=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot3-\frac{2}{3}-3+6=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}+3$ $\frac{2}{3}*3=3$.	3p 2p

	b) $x * a = \frac{xa}{3} - x - a + 6 = \frac{ax}{3} - a - x + 6 = a * x$, pentru orice numere reale a și x. $x * a = x \Leftrightarrow \frac{ax}{3} - a - x + 6 = x \Leftrightarrow (a-6)(x-3) = 0$ pentru orice număr real x. $\Rightarrow a - 6 = 0 \Rightarrow a = 6$ satisface cerința.	2p 3p
	c) conform b) $x * 6 = 6 * x = x, \forall x \in \mathbb{R}$, deci $e = 6$ este element neutru . $m \in \mathbb{Z}$ are simetricul un pătrat perfect dacă există $m' \in \mathbb{N}$ astfel încât $m * m' = m' * m = 6$. $m * m' = m' * m$ (conform b). $m * m' = 6 \Leftrightarrow \frac{mm'}{3} - m - m' + 6 = 6 \Leftrightarrow mm' - 3m - 3m' = 0$ $\Leftrightarrow m'(m-3) = 3m$. Pentru $m \neq 3, m' = 3 + \frac{9}{m-3}$. Cum $m' \in \mathbb{N}$, $3 \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{9}{m-3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ $m - 3 \in D_9^{\mathbb{Z}}$ adică $m - 3 \in \{-9, -3, -1, 1, 3, 9\} \Rightarrow m \in \{-6, 0, 2, 4, 6, 12\}$. Pentru $m = 0$ si pentru m=12 avem $m' = 0$, respectiv $m' = 4$, pătratele numerelor naturale 0 si 2.	 3p 2p
SUBIECTUL III		
1)	a) f este funcție continuă și derivabilă pe $(0, \infty)$, $\lim_{x \to e} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = f'(e)$ $f'(x) = 0 + \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, x \in (0, \infty)$ $\Rightarrow f'(e) = \frac{1 - \ln e}{e^2} = 0$. Deci $\lim_{x \to e} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = 0$.	2p 3p
	b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) = 1 + \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{1} = 1 + 0 = 1 \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ y=1 ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$, nu există asimptotă oblică spre $+\infty$.	3p 2p
	c) $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, continuă pe $(0, \infty)$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$. $f'(x) < 0$ pentru $x \in (e, +\infty)$ deci $f(x)$ este descrescătoare pentru $x \in (e, +\infty)$. Pentru $x \geq 3$ avem $x < x + 1$, cum $f(x)$ este descrescătoare $\Rightarrow f(x) > f(x+1) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 1 + \frac{\ln x}{x} > 1 + \frac{\ln(x+1)}{x+1} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} > \frac{\ln(x+1)}{x+1}$. Cum $x \geq 3 \Rightarrow (x+1)\ln x > x\ln(x+1)$ $\Leftrightarrow \ln x^{x+1} > \ln(x+1)^x$, $\ln x$ este funcție crescătoare, deci $x^{x+1} > (x+1)^x$ pentru orice $x \geq 3$.	 3p 2p
2)	a) $\int_{-1}^{1} (x^2 + 1) f(x) dx = \int_{-1}^{1} (x^2 + 1) \left(1 - \frac{x+1}{x^2+1}\right) dx = \int_{-1}^{1} (x^2 - x) dx =$ $= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right) \Big\|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$.	2p 3p
	b) $\int_1^3 \frac{1}{x} \cdot \left(f(x) + \frac{x}{x^2+1}\right) dx = \int_1^3 \frac{1}{x} \cdot \left(1 - \frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x}{x^2+1}\right) dx = \int_1^3 \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2+1-x-1+x}{x^2+1} dx = \int_1^3 \frac{x}{x^2+1} dx =$ $= \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big\|_1^3 = \frac{1}{2}(\ln 10 - \ln 2) = \frac{1}{2} \ln 5$	2p 3p
	$\int_1^a \frac{x+1}{1 - f(x)} \cdot \ln x \, dx = \int_1^a (x+1) \cdot \frac{x^2+1}{x+1} \cdot \ln x \, dx = \int_1^a (x^2 + 1) \cdot \ln x \, dx =$ $\left(\frac{x^3}{3} + x\right) \cdot \ln x \Big\|_1^a - \int_1^a \left(\frac{x^3}{3} + x\right) \cdot \frac{1}{x} \, dx = \left(\frac{a^3}{3} + a\right) \ln a - 0 - \left(\frac{x^3}{9} + x\right) \Big\|_1^a =$ $= \left(\frac{a^3}{3} + a\right) \ln a - \left(\frac{a^3}{9} + a - \frac{1}{9} - 1\right) = \frac{3(a^3 + 3a)\ln a - a^3 - 9a + 10}{9}$ $\frac{3(a^3 + 3a)\ln a - a^3 - 9a + 10}{9} = \frac{2a^3 + 10}{9} \Leftrightarrow 3(a^3 + 3a)\ln a - 3(a^3 + 3a) = 0$ $\Leftrightarrow 3a(a^2 + 3)(\ln a - 1) = 0$. $a = 0$ nu convine. Din $\ln a - 1 = 0$, $a = e$ care convine.	1p 2p 2p