CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ
„TEHNICI MATEMATICE”-ediția a XIX-a
Etapa județeană 23.02.2024
Clasa a XII -a Matematică *M_șt-nat*
Barem de corectare

Subiectul I 1. $1+\frac{b_1}{b_2}+\frac{b_2}{b_1}+1=0\Rightarrow 2+\frac{b_1}{b_1q}+\frac{b_1q}{b_1}=0\Rightarrow 2+\frac{1}{q}+q=0$ 3p

$q^2+2q+1=0\Rightarrow q=-1$ 2p

2. $f(g(x))=3x+5\Rightarrow 3g(x)+2=3x+5$ 3p

$3g(x)=3x+3\Rightarrow g(x)=x+1$ 2p

3. $\left(\sqrt{x^2+x-1}\right)^2=x^2\Rightarrow x-1=0\Rightarrow x=1$, care verifică ecuația..........................2p

$\log_2(3+m)=2\Rightarrow 3+m=2^2\Rightarrow m=1\in(-3,+\infty)$..........................3p

4. Sunt 15 cazuri favorabile 1p

$\frac{n(n-1)}{2}+n(n-1)\le 45\Rightarrow n(n-1)\le 30\Rightarrow n\in\{2,3,4,5,6\}$, 5 cazuri posibile..........................3p

$P=\frac{5}{15}\Rightarrow P=\frac{1}{3}$..........................1p

5. $M(5,4)$ mijlocul lui BC, $N(3,3)$ mijlocul lui AM 2p

$d'\parallel d\Rightarrow m_{d'}=m_d=2, d':y-3=2(x-3)\Rightarrow d':2x-y-3=0$ 3p

6. $\sin A=\frac{4}{5},\sin B=\frac{3}{5}$..........................2p

$\sin C=\sin(\pi-(A+B))=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A=1\Rightarrow C=90^0$ 3p

Subiectul II 1.a) $\det(A(\alpha))=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha(-\sin\alpha)=$..........................2p

$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$..........................3p

b) $A(\alpha)A(\beta)=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta\\ -\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\end{pmatrix}$..........................2p

$=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta)\\ -\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}=A(\alpha+\beta).$..........................3p

c) $B=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2} & \frac12\\ -\frac12 & \frac{\sqrt3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6}\\ -\sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6}\end{pmatrix}\Rightarrow B^n=\begin{pmatrix}\cos n\frac{\pi}{6} & \sin n\frac{\pi}{6}\\ -\sin n\frac{\pi}{6} & \cos n\frac{\pi}{6}\end{pmatrix},\det(B^n)=1$..........................3p

$\sum_{k=3}^{2024}\det(B^k)=\det(B^3)+\det(B^4)+...+\det(B^{2024})=1+1+...+1=2022.$ 2p

2.a) Din $x*e=x,\forall x\in G\Rightarrow\left(x+\frac32\right)\left(e+\frac32-1\right)=0,\forall x\in G$ 3p

având în vedere că legea este comutativă, obținem $e=-\frac12\in G$ element neutru 2p

b) Ecuația $\ln\left(x+\frac32\right)=y, y\in\mathbb{R}$ are soluția unică $x=e^y-\frac32\in G\Rightarrow f$ bijectivă..........................2p

$f(x*y)=\ln\left(x*y+\frac{3}{2}\right)=\ln\left(x+\frac{3}{2}\right)+\ln\left(y+\frac{3}{2}\right)=f(x)+f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}$ 3p

c) $f\left((x+1)*(x+2)*...*(x+10)*\left(\frac{1}{1+\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}\right)*\left(\frac{1}{2+\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}\right)*...*\left(\frac{1}{10+\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}\right)\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)$

$f((x+1))+f((x+2))+...+f\left(\left(\frac{1}{10+\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}\right)\right)=0$ 3p

$\frac{2}{5}\left(x+\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{2}{7}\left(x+\frac{7}{2}\right)\cdot...\cdot\frac{2}{23}\left(x+\frac{23}{2}\right)=1\Rightarrow x=0,$ soluție unică, deoarece membrul stâng este funcție strict crescătoare ca produs de funcții strict crescătoare pozitive 2p

Subiectul III 1.a) $f'(x)=\frac{(x^2)'(x-b)-(x^2)(x-b)'}{(x-b)^2}=$ 3p

$=\frac{2x(x-b)-x^2}{(x-b)^2}=\frac{x^2-2bx}{(x-b)^2}$ 2p

b) $m=1,n=2$, $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-bx}=1$ 2p

$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-b}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{bx}{x-b}=b,b=2.$ 3p

c) Dacă $b<0$, f este strict crescătoare pe $(-\infty,2b],[0,+\infty)$ și strict descrescătoare pe $[2b,b),(b,0]$. Dacă $b>0$, f este strict crescătoare pe $(-\infty,0],[2b,+\infty)$ și strict descrescătoare pe $[0,b),(b,2b]$...1p

Punctele de extrem ale graficului sunt $O(0,0),A(2b,4b)$ 2p

$OA=2\sqrt{5}\Rightarrow\sqrt{(2b-0)^2+(4b-0)^2}=2\sqrt{5}\Rightarrow 2\sqrt{5}|b|=2\sqrt{5}\Rightarrow b=\pm 1.$ 2p

2.a) $\int_0^1 x\left(f\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)dx=\int_0^1 e^x x dx=$ 2p

$\int_0^1 (e^x)' x dx=e^x x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx=1$ 3p

b) $\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^x}{g(x)}dx=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}dx=$ 2p

$\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{(e^{2x}-1)'}{e^{2x}-1}dx=\ln|e^{2x}-1|\Big|_{\ln 2}^{\ln 3}=\ln\frac{8}{3}$ 3p

c) $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\varphi(x)=\frac{f(x)}{e^{2x}+1}$ este impară, $\varphi(-x)=\frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1}=\frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}=-\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=-\varphi(x)$ 3p

$I=0\Rightarrow[I]=0$ 2p