



MINISTERUL EDUCAȚIEI



## CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ

“TEHNICI MATEMATICE“- ediția a XIX-a

Etapa județeană 23.02.2024

Clasa a XI-a – Matematică *M\_șt-nat*

**Subiectul I** a) Se dau matricele  $A, B, C \in M_3(\mathbb{R})$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & m-3 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}, m \in \mathbb{R} \text{ și } C = A^2 + B.$$

Să se demonstreze că:  $\det(C^n + C^{n-1}) = 8$ ,  $(\forall)n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .

b) Dacă  $X \in M_3(\mathbb{R})$  astfel încât  $X(X + 2I_3) = -4I_3$ , calculați  $X^3$ .

c) Să se verifice egalitatea: 
$$\begin{vmatrix} 1 & 5y - 5x & 10 \\ x & y^2 - 4x^2 + 3xy & 6x + 4y \\ x^2 & x^2y + 2xy^2 - 3x^3 & 3x^2 + 6xy + y^2 \end{vmatrix} = (y - x)^4.$$

**Subiectul II** a) Dacă  $f : \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$  cu  $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ , calculați  $\lim_{x \rightarrow \infty} [(f \circ f \circ f)(x)]^2$ .

b) Fie funcția  $f : \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{2^x - 3^x}{6x} + \log_2(x + 8), & x > 0 \\ x^2 - 5x + a + 2, & x \leq 0 \end{cases}$ .

Determinați  $a \in \mathbb{R}$  pentru care funcția  $f$  are limită în  $x_0 = 0$ .

c) Calculați  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{\left( \frac{x^3\sqrt{x} + x - \sqrt[3]{x} - 1}{x^3\sqrt{x} - x + \sqrt[3]{x} - 1} \right)^{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}}$ .

**Subiectul III** În reperul cartezian  $XOY$  considerăm punctele:

$A(a, 2a^2 + a)$ ,  $B(b, 2b^2 + b)$ ,  $C(c, 2c^2 + c)$ , unde  $a, b, c$  sunt numere întregi diferite.

a) Să se arate că punctele  $A, B, C$  nu pot fi coliniare.

b) Să se arate că aria triunghiului  $ABC$  este număr natural divizibil cu 2.

c) Să se determine numerele întregi  $a, b, c$  știind că dreptele  $AB$  și  $AC$  sunt perpendiculare.

Pentru fiecare subiect se acordă 30 puncte.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timp de lucru 120 minute.

Subiectele au fost selectate și propuse de:

prof. Drăgan Elena

prof. Pozinărea Simona