



MINISTERUL EDUCAȚIEI



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ
„TEHNICI MATEMATICE”-editia a XIX-a
Etapa județeană 23.02.2024
Clasa a X -a Matematică *M_șt-nat*

Subiectul I

- a) Rezolvați ecuația $\sqrt{2x+1} + \sqrt{3x+2} + \sqrt{4x+3} = \sqrt{1-2x} + \sqrt{2-3x} + \sqrt{3-4x}$.
- b) Rezolvați ecuația $\frac{1}{x} \cdot \sqrt{2024^2 - x^2} - \sqrt{\frac{2024^2}{x^2} - 1} = 0$.
- c) Fie $x = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$. Demonstrați că $x \in \mathbb{Q}$.

Subiectul II

- a) Rezolvați ecuația $8 \cdot (4^x + 4^{-x}) - 54 \cdot (2^x + 2^{-x}) + 101 = 0$.
- b) Dacă $a, b \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ și $\log_a(a^2b^3) = 1$, să se calculeze $\log_{a^2b^3} \left(\frac{\sqrt[5]{a^3b^2}}{ab^3} \right)$.
- c) Demonstrați că $(\forall)x, y, z \in [e, \infty)$, avem $\ln(xyz) + 3 \cdot \ln x \cdot \ln y \cdot \ln z \geq 2(\ln x \cdot \ln y + \ln x \cdot \ln z + \ln y \cdot \ln z)$.

Subiectul III

- a) Se dă funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}; f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$. Să se demonstreze că f este bijectivă și să se rezolve ecuația $f(x) \cdot f^{-1}(x) = 3$, unde $f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ este inversa funcției f .
- b) Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ și $z = \sqrt{z_1 \cdot z_2}$. Să se arate că $|z_1| + |z_2| = \left| \frac{z_1+z_2}{2} + z \right| + \left| \frac{z_1+z_2}{2} - z \right|$.
- c) Fie $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $z^{2024} = 1$. Calculați suma $S = \frac{1}{1+z} + \frac{1}{1+z^2} + \dots + \frac{1}{1+z^{2024}}$.

Fiecare subiect are 30 puncte
Se acordă 10 puncte din oficiu
Timp de lucru 120 minute

Subiectele au fost selectate și propuse de:
Prof.dr.Cătălin Pană
Prof.Cristian Daniel Cotoarbă