



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ
„TEHNICI MATEMATICE”-editia a XIX-a
Etapa județeană 23.02.2024
Clasa a IX -a Matematică *M_tehnologic*

Subiectul I

Se consideră numerele reale $a = \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{3+2\sqrt{2}}$ și $b = 2 + \sqrt{6 + 4\sqrt{2}}$.

- a) Arătați că $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- b) Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor a și b .
- c) Determinați $x, y \in \mathbb{Q}$ astfel încât $xa + yb + 2024 = 0$.

Soluție:

a) $a = \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{3+2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} + \frac{3-2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} = \sqrt{2} + 1 + 3 - 2\sqrt{2} \dots\dots\dots 3p$

Deci, $a = 4 - \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \dots\dots\dots 2p$

$b = 2 + \sqrt{6 + 4\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{(2 + \sqrt{2})^2} = 2 + |2 + \sqrt{2}| \dots\dots\dots 3p$

$b = 4 + \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \dots\dots\dots 2p$

b) $m_a = \frac{a+b}{2} = \frac{4-\sqrt{2}+4+\sqrt{2}}{2} \dots\dots\dots 3p$

$m_a = 4 \dots\dots\dots 2p$

$m_g = \sqrt{ab} = \sqrt{(4 - \sqrt{2})(4 + \sqrt{2})} \dots\dots\dots 3p$

$m_a = \sqrt{14} \dots\dots\dots 2p$

c) $xa + yb + 2024 = x(4 - \sqrt{2}) + y(4 + \sqrt{2}) + 2024 =$
 $= (4x + 4y + 2024) + \sqrt{2}(-x + y) \dots\dots\dots 2p$

Relația devine $(4x + 4y + 2024) + \sqrt{2}(-x + y) = 0$, unde $x, y \in \mathbb{Q} \dots\dots\dots 2p$

Obținem $\begin{cases} 4x + 4y + 2024 = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \dots\dots\dots 3p$

Cu soluția $x = y = -253 \dots\dots\dots 3p$

30 puncte

Subiectul II

a) Calculați suma primilor 30 de termeni ai progresiei aritmetice știind că:

$$\begin{cases} a_4 - a_2 = 4 \\ a_1 + a_3 + a_5 + a_6 = 30. \end{cases}$$

b) Un triunghi ABC are măsurile unghiurilor A, B, C în progresie aritmetică, în această ordine. Determinați măsura unghiului B.

c) Fie $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2024}}$. Demonstrați că $S \in (1, 2)$.

Soluție:

a) $\begin{cases} 2r = 4 \\ a_1 + a_1 + 2r + a_1 + 4r + a_1 + 5r = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ 4a_1 + 11r = 30 \end{cases} \dots\dots\dots 3p$



- Deci, $r = 2$ și $a_1 = 2$2p
 Obținem suma primilor 30 de termeni $S_{30} = 930$5p
 b) $A + B + C = 180^\circ$3p
 A, B, C în progresie aritmetică, deci $B = \frac{A+C}{2} \Rightarrow 2B = A + C$ 3p
 Obținem $3B = 180^\circ \Rightarrow B = 60^\circ$ 4p
 c) Observ suma primilor 2025 de termeni ai unei progresii geometrice cu primul termen $b_1 = 1$ și rația $q = \frac{1}{2}$4p
 $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2024}} = \frac{1 - \frac{1}{2^{2025}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{2024}}$ 4p
 Obținem $S \in (1, 2)$ 2p

30 puncte

Subiectul III

Fie ABCD un paralelogram, iar O punctul de intersecție a diagonalelor AC și BD.

- a) Arătați că, oricare ar fi P un punct al planului paralelogramului ABCD, are loc relația:
 $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD} = 4\vec{PO}$.
 b) Dacă M este mijlocul laturii AB, iar N este mijlocul laturii CD, demonstrați că
 $\vec{DM} = \vec{NB}$.
 c) Știind că vectorii $\vec{CB} + \vec{CD}$ și $\vec{DA} + \vec{DC}$ au modulele egale, demonstrați că ABCD este dreptunghi.

Soluție:

- a) $\vec{PA} + \vec{PC} = \vec{PO} + \vec{OA} + \vec{PO} + \vec{OC} = 2\vec{PO} + \vec{OA} + \vec{OC}$3p
 $\vec{PB} + \vec{PD} = \vec{PO} + \vec{OB} + \vec{PO} + \vec{OD} = 2\vec{PO} + \vec{OB} + \vec{OD}$ 3p
 ABCD paralelogram, deci $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{0}$, $\vec{OB} + \vec{OD} = \vec{0}$3p
 Deci, $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD} = 4\vec{PO}$ 1p
 b) $\vec{DM} = \vec{DA} + \vec{AM}$ 3p
 $\vec{NB} = \vec{NC} + \vec{CB}$ 3p
 ABCD paralelogram, deci, $\vec{DA} = \vec{CB}$, iar $\vec{AM} = \frac{\vec{AB}}{2}$ și $\vec{NC} = \frac{\vec{DC}}{2}$, $\vec{DC} = \vec{AB}$3p
 Obținem: $\vec{DM} = \vec{NB}$1p
 c) $\vec{CB} + \vec{CD} = \vec{CA}$3p
 $\vec{DA} + \vec{DC} = \vec{DB}$ 3p
 Dacă $|\vec{CB} + \vec{CD}| = |\vec{DA} + \vec{DC}|$, atunci $|\vec{CA}| = |\vec{DB}|$, adică AC=BD3p
 Obținem că paralelogramul ABCD are diagonalele egale, deci ABCD dreptunghi..... 1p

30 puncte