CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ
„TEHNICI MATEMATICE”-editia a XIX-a
Etapa judeteană 23.02.2024
Clasa a IX -a Matematică *M_șt-nat*

Subiectul I

a) Determinați valoarea minimă a expresiei $E(x,y) = 3x + 4y$ știind că $x, y \in \mathbb{R}$ și $|4x - 3| \leq 2, |3y - 4| \leq 5$;
b) Demonstrați că, pentru orice număr natural n, numărul $x_n = 3^n + 2n + 3$ este divizibil cu 4;
c) Calculați câte numere naturale de 5 cifre sunt divizibile cu 5 și au suma primelor două cifre egală cu 5.

Soluție:

a) $-2 \leq 4x - 3 \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq 4x \leq 5 \Longrightarrow \frac{3}{4} \leq 3x \leq \frac{15}{4}$..3p
$-\frac{4}{3} \leq 4y \leq 12$...3p
$E_{min} = \frac{3}{4} - \frac{4}{3} = -\frac{7}{12}$...4p
b) $P(n): x_n = 3^n + 2n + 3 \ \vdots\ 4$
Verificare: $P(0): x_0 = 4 \ \vdots\ 4\ (A)$..2p
Presupunem $P(n): x_n = 3^n + 2n + 3 \ \vdots\ 4$ adevărată
$P(n) \to P(n+1); P(n+1) : x_{n+1} = 3^{n+1} + 2(n+1) + 3 \ \vdots\ 4$...............................2p
Știm $3^n + 2n + 3 = M_4 \Longrightarrow 3^{n+1} + 6n + 9 = M_4 \Longrightarrow$...2p
$3^{n+1} + 2(n+1) + 3 = M_4 - (4n+4) = M_4 \Longrightarrow x_{n+1} = 3^{n+1} + 2(n+1) + 3 \ \vdots\ 4$
Deci, $P(n+1)$ adevărată...4p
c) Numărul are forma $\overline{abcde}$ 1p
unde $(a,b) \in \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(5,0)\}$, iar $e \in \{0,5\}$.......................................4p
c și d pot lua câte 10 valori..2p
Obținem 1000 numere...3p

30 puncte

Subiectul II

a) Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a + b = 2$. Arătați că $a^4 + b^4 \geq 2$;
b) Arătați că $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$;
c) Fie $a, b, c > 0$. Demonstrați inegalitatea $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$.

Soluție:

a) $a + b = 2 \Longrightarrow a - 1 = 1 - b \stackrel{\text{def}}{=} c \Longrightarrow a = 1 + c, b = 1 - c$..5p
Deci, $a^4 + b^4 = (1+c)^4 + (1-c)^4 = 2(1 + 6c^2 + c^4) \geq 2$......................................5p
b) $m_h \leq m_a \Longrightarrow \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \leq \frac{x+y+z}{3}$ 5p
Obținem $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$ 5p
c) Folosind inegalitatea $m_h \leq m_a$ obținem:
$\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$...3p

$\frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$...3p

$\frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$...3p

Însumând relațiile obținem: $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$.......................................1p

30 puncte

Subiectul III

a) Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Atunci $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$, pentru orice punct $M \in P$;

b) Fie triunghiul ABC, iar I centrul cercului înscris în triunghi și M mijlocul laturii *(BC).* Dacă X este simetricul punctului I față de M, atunci arătați că $\overrightarrow{r_x}=\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}-\overrightarrow{r_I}$, unde $\overrightarrow{r_P}$ reprezintă vectorul de poziție al unui punct oarecare P din plan.

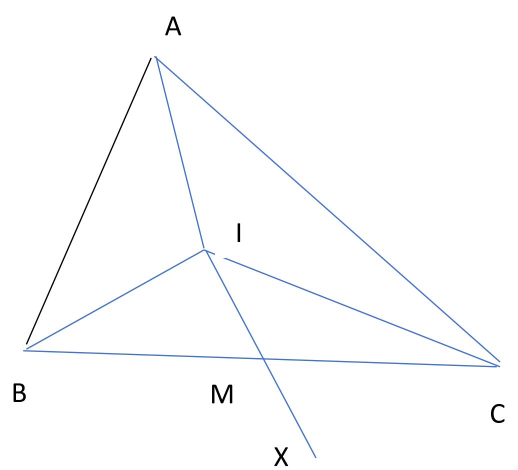
c) Fie triunghiul *ABC*, iar *I* centrul cercului înscris în triunghi și *G* centrul său de greutate. Demonstrați că triunghiul cu vârfurile în simetricele punctului *I* față de mijloacele laturilor triunghiului *ABC* are centrul de greutate *G* dacă și numai dacă *ABC* este triunghi echilateral.

(prelucrare G.M.2023)

Soluție:

a) Demonstrarea relației lui Leibniz...10p

b)



IBXC paralelogram, M intersecția diagonalelor...............................2p

deci,

$\overrightarrow{r_x}+\overrightarrow{r_I}=2\overrightarrow{r_M}=\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}$...........6p

Obținem de aici:

$\overrightarrow{r_x}=\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}-\overrightarrow{r_I}$......................2p

c) Considerăm punctele M, N și P mijloacele laturilor *(BC), (AC),* respectiv *(AB)* , iar punctele X, Y *și* Z este simetricele punctului I față de M, N, respectiv P.

Aplicăm relația de la punctul b) și pentru celelalte simetrice și obținem:

$\overrightarrow{r_y}=\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_C}-\overrightarrow{r_I}$ 2p

$\overrightarrow{r_Z}=\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_A}-\overrightarrow{r_I}$...2p

Din a) știm că triunghiul XYZ are centrul de greutate în G$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{r_G}=\overrightarrow{r_X}+\overrightarrow{r_Y}+\overrightarrow{r_Z}$ 3p

Folosind relația de la b) obținem: $3\overrightarrow{r_G}=\overrightarrow{r_X}+\overrightarrow{r_Y}+\overrightarrow{r_Z}=2(\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C})-3\overrightarrow{r_I}$..........2p

Deci $3\overrightarrow{r_G}=6\overrightarrow{r_G}-3\overrightarrow{r_I} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{r_G}=3\overrightarrow{r_I} \Leftrightarrow I=G \Leftrightarrow \Delta ABC\ echilateral$.....................1p

30 puncte